OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 19.02.2015
Subiecte clasa a XI-a matematică-informatică

1. Fie matricele $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

   a) Să se arate că dacă $AB = BA$ atunci $\det\left(A^2 + B^2\right) \geq 0$.

   b) Dacă $\det A > 0$ să se arate că $\det\left(A - I_n + A^{-1}\right) \geq 0$.

2. Fie matricele $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $(A+B)^2 = A^2 + B^2$ și $(A+B)^4 = A^4 + B^4$.

   Să se arate că $(AB)^2 = O_n$.

   (GM 10/ 2010)

3. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 > 0$ şi $a_{n+1} = a_n + \ln\left(1 + n + n^2\right)$, $\forall n \geq 1$.

   a) Să se studieze convergența şirului $(a_n)_{n\geq 1}$.

   b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n \cdot \ln n}$.

   (prof. Ruxanda şi George Georgescu)

4. Fie şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu termeni strict pozitivi, definit prin $a_1 = 1$ şi

   $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_n} = \dfrac{n+1}{2}\sqrt{a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Să se arate că şirul are limită şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

   b) Să se determine $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n \cdot \ln \prod\limits_{k=1}^{p} \cos\dfrac{k}{n}\right) = -7$.

   (prof. Ruxanda şi George Georgescu)

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de trei ore.
3. Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.